

II Tenseur des contraintes

Nous allons présenter la notion de contrainte par extension de la mécanique des solides indéformables. Cette présentation est directement liée à la signification physique des contraintes, et offre l'avantage d'utiliser un bagage que vous maîtrisez.

A savoir : Le mouvement d'un solide indéformable est complètement déterminé dès que l'on connaît à chaque instant deux vecteurs : la force résultante et le moment résultant appliqués sur le solide (état actuel).

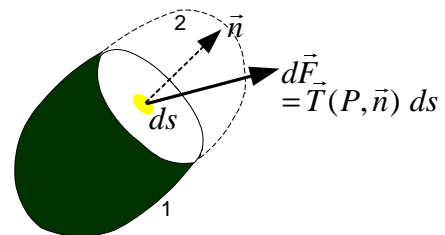
En effet, la position du solide est définie par deux vecteurs également (la position de son centre de gravité et la rotation autour de ce centre de gravité) et le principe fondamental de la dynamique permet de relier la force résultante au déplacement du centre de gravité et le moment résultant à la rotation autour du centre de gravité.

Nous allons isoler par la pensée un petit élément de matière quelconque et écrire le Principe Fondamental de la Dynamique "PFD".

II-I Tenseur des contraintes

Imaginons un corps soumis à des efforts extérieurs, les contraintes sont des efforts intérieurs (ou efforts de cohésion) qui se développent au sein du milieu, ils sont dus aux interactions entre les particules du milieu.

Soit un corps en équilibre que nous coupons en deux parties. La partie 1 reste à l'équilibre sous les actions mécaniques extérieures qui lui sont appliquées et sous les actions de la partie 2 sur la partie 1.



Nous admettrons que sur chaque élément de la surface de coupe s'exerce une force élémentaire

$$d\vec{F} = \vec{T}(P, \vec{n}) ds \quad \text{avec } \vec{T}(P, \vec{n}) : \text{pression } (N/m^2)$$

Le vecteur $\vec{T}(P, \vec{n})$ est appelé vecteur contrainte en P par rapport à la facette de normale \vec{n} . Ce vecteur a la dimension d'une pression.

Le principe de l'action réaction $\rightarrow \vec{T}(P, -\vec{n}) = -\vec{T}(P, \vec{n})$

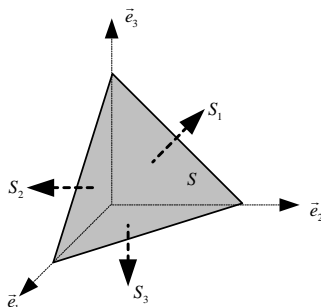
Montrons que le vecteur contrainte $\vec{T}(P, \vec{n})$ dépend linéairement de \vec{n}

Idée : consiste à isoler par la pensée un petit élément de matière pour faire apparaître les efforts de cohésion dans la matière.

Un élément de volume sera un infiniment petit d'ordre 3 alors que les éléments de surface sont des infiniment petits d'ordre 2, ce que nous notons :

$$dv \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0(\varepsilon^3) \quad \text{et} \quad ds \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0(\varepsilon^2)$$

Écrivons les 3 équations, de résultante, déduites du PFD pour un petit trièdre de matière. La quantité d'accélération est un infiniment petit d'ordre 3, ce qui revient à écrire les équations d'équilibre suivantes:



S : surface inclinée du trièdre de normale \vec{n}

S_i : faces des plans (\vec{e}_j, \vec{e}_k) du trièdre, surfaces de normale $-\vec{e}_i$

$$\text{PFD} \rightarrow \vec{T}(P, \vec{n})ds + \sum_i \vec{T}(Q_i, -\vec{e}_i)ds_i = \vec{0}(\varepsilon^3)$$

$$\vec{T}(Q_i, -\vec{e}_i) = -\vec{T}(Q_i, \vec{e}_i)$$

$$\rightarrow \vec{T}(P, \vec{n})ds = \sum_i \vec{T}(Q_i, \vec{e}_i)ds_i \quad \text{or} \quad ds_i = ds \vec{n} \cdot \vec{e}_i$$

→ $\vec{T}(P, \vec{n}) = \sum_i \vec{T}(Q_i, \vec{e}_i) n_i$ Il existe donc un opérateur linéaire $\vec{n} \longrightarrow \vec{T}(P, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}_{(P)} \vec{n}$

Les 3 équations de moment conduisent à la symétrie de l'opérateur : $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$

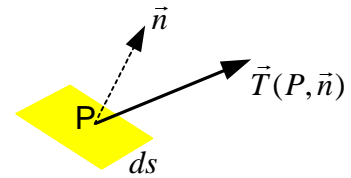
Définition :

Le tenseur des contraintes est défini dans l'état déformé, noté $\overline{\overline{\sigma}}_C$: **tenseur des contraintes de Cauchy**

Il permet d'exprimer la tension sur un élément de surface de normale \vec{n}
 $\vec{T}(P, \vec{n}) = \overline{\overline{\sigma}}_{C(P)} \vec{n}$ c'est une pression. (N / m²)

La force élémentaire exercée sur cette surface est : $d\vec{F} = \vec{T}(P, \vec{n}) ds$

Ce tenseur est symétrique $\overline{\overline{\sigma}}^T = \overline{\overline{\sigma}}$



Dans un système de coordonnées cartésienne $\overline{\overline{\sigma}}_C$ est représenté par :

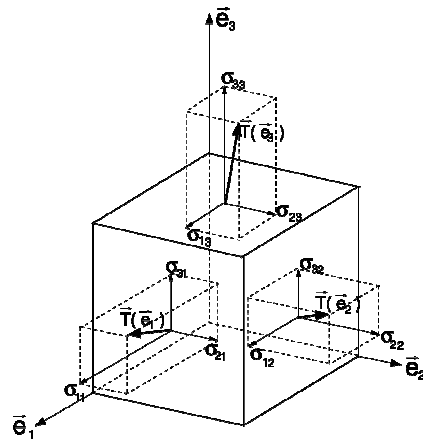
$$\overline{\overline{\sigma}}_C = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & \sigma_{33} \end{bmatrix}$$

σ_{ii} contraintes normales

σ_{ij} contraintes de cisaillement

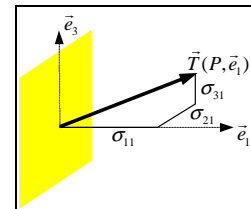
Le matériau est dit en traction suivant la direction \vec{e}_i si la contrainte normale $\sigma_{ii} > 0$.

on parlera de compression dans le cas contraire.



La signification physique des coefficients de cette matrice est donnée par la figure ci-contre

$$\vec{T}(P, \vec{e}_1) = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{21} \\ \sigma_{31} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{13} \end{Bmatrix}$$



Les contraintes correspondent le plus souvent à des pressions très importantes (fonction de la cohésion du matériau), c'est pourquoi le Méga-pascal est couramment utilisé comme unité.

$Pa = 1N / m^2$ et $MPa = 10^6 Pa = 1N / mm^2$

Historiquement :

Vous rencontrerez, dans certains ouvrages anciens, l'unité traditionnelle "l'hectobar" qui représente 10N par mm² soit approximativement 1Kgf par mm². → 1hbar = 10MPa .

Le tenseur des contraintes est une grandeur spatiale (définie dans l'état actuel) pour pouvoir effectuer les calculs dans une représentation Lagrangienne nous devons exprimer ce tenseur sur l'état de référence.

Utilisons la transformation de surface présentée dans le chapitre précédent : $\vec{n} ds = J F^{-T} \vec{N} ds_o$

Nous obtenons $\overline{\overline{\sigma}}_L$: Tenseur des contraintes de Piola-Lagrange ou 1^{er} Tenseur de Piola-Kirchhoff

$$d\vec{F}_{(P)} = \overline{\overline{\sigma}}_L \vec{N} ds_o \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{\sigma}}_L = J \overline{\overline{\sigma}}_C F^{-T}$$

Puis exprimons $d\vec{F}_{(P)}$ sur l'état initial : $d\vec{F}_{(P)} = \overline{\overline{F}}^{-1} d\vec{F}_{(P)}$

Nous obtenons $\overline{\overline{\sigma}}_K$: Tenseur des contraintes de Piola-Kirchhoff

$$d\vec{F}_{(P)} = \overline{\overline{\sigma}}_L \vec{N} ds_o \quad \text{avec} \quad \overline{\overline{\sigma}}_K = J \overline{\overline{\sigma}}_C \overline{\overline{F}}^{-T}$$

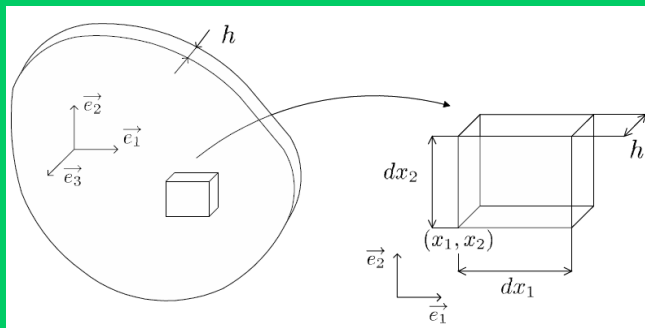
$d\vec{F}_o$ pseudo tension

Ce tenseur est symétrique

En petites perturbations ces 3 tenseurs sont confondus, et on note : $\overline{\overline{\sigma}} = \overline{\overline{\sigma}}_C = \overline{\overline{\sigma}}_K = \overline{\overline{\sigma}}_L$

Exercice II-1 : Équilibre de la matière

On considère une plaque d'épaisseur uniforme h petite devant les autres dimensions. La plaque est soumise à un champ de force volumique \vec{f} (pesanteur) et des actions mécaniques extérieures. On isole un petit parallélépipède de matière $dx_1 \times dx_2 \times h$



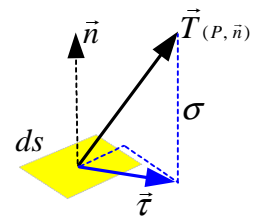
- 1- Expliquer pourquoi ce parallélépipède est à l'équilibre, faire une figure pour représenter tous les efforts sur cet élément de matière.
- 2- Exprimer les efforts de cohésion en fonction du tenseur des contraintes.
- 3- En déduire les deux équations d'équilibre de résultante et l'équation d'équilibre de moment

II-2 Propriétés du tenseur des contraintes

La tension sur un élément de surface de normale \vec{n} s'exprime par :

$$\vec{T}_{(P, \vec{n})} = \overline{\overline{\sigma}}_{(P)} \vec{n} \quad \vec{T} = \overline{\overline{\sigma}} \vec{n}$$

Ce vecteur peut se décomposer en **contrainte normale** composante suivant la normale de la tension sur la facette et en un vecteur tangentiel, dit **contrainte tangentielle** ou **contrainte de cisaillement**.



$$\text{Soit : } \vec{T} = \sigma \vec{n} + \vec{\tau} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \sigma = \overline{\overline{\sigma}} \vec{n} \cdot \vec{n} \\ \vec{\tau} = \vec{T} - \sigma \vec{n} = \tau \vec{t} \end{cases}$$

II-2.1 Théorème de Cauchy

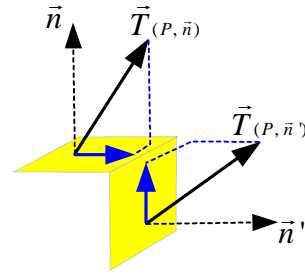
Ce théorème souvent dit théorème de réciprocité des contraintes tangentielles, vient de la symétrie du tenseur des contraintes (absence de couple de masse dans le milieu).

Théorème de Cauchy :

pour toutes directions \vec{n}, \vec{n}'

$$\text{Nous avons } \vec{T}_{(P, \vec{n})} \cdot \vec{n}' = \vec{T}_{(P, \vec{n}')} \cdot \vec{n}$$

La figure suivante donne une représentation du théorème dans le cas particulier où $\vec{n} \perp \vec{n}'$



$$\text{Le théorème s'écrit : } \forall \vec{n} \quad \vec{n} \perp \vec{n}' \quad \vec{\tau}_n \cdot \vec{n}' = \vec{\tau}_{n'} \cdot \vec{n}$$

II-2.2 contraintes principales

Le tenseur des contraintes étant un tenseur symétrique d'ordre 2, il peut s'exprimer sur une base privilégiée dite base principale dans laquelle la matrice sera diagonale. Cette base propre orthonormée directe sera notée $(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})$

$$[\bar{\sigma}]_{(\vec{e}_I, \vec{e}_{II}, \vec{e}_{III})} = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{III} \end{bmatrix}$$

Les facettes, dont un des vecteurs de la base principale est la normale, ne subissent aucun cisaillement. Ce sont des facettes en traction – compression pure.

Si pour toute facette les contraintes de cisaillement sont nulles, c'est que **l'état de contrainte est hydrostatique**

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & \sigma & 0 \\ 0 & 0 & \sigma \end{bmatrix} \quad \text{avec } \sigma = -P \quad \text{si } P \text{ est la pression hydrostatique}$$

Un **état de contrainte est dit uni-axial** (c'est une hypothèse de modélisation) si deux valeurs propres sont supposées négligeables :

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{cas de l'hypothèse des barres en traction } \sigma = F / S$$

Un **état de contrainte est dit plan** (c'est une hypothèse de modélisation) si une valeur propre est supposée négligeable :

$$[\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_I & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{II} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{ou dans une autre base du plan } [\bar{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

C'est l'état de contrainte sur une surface, de normale \vec{e}_{III} , non chargée. "dans le vide"

Application :

Plaques et coques minces : Le milieu étant mince l'état de contrainte, sur l'épaisseur, s'écartera peu de l'état de contraintes sur les faces. Or si la pression atmosphérique est négligée devant les chargements mécaniques extérieurs, l'état de contrainte sur les faces d'une plaque ou d'une coque est plan. L'hypothèse consiste donc à considérer que l'état de contrainte est plan en tout point du milieu.

Exercice II-2 : État de contraintes particuliers

- I- A quels états de contraintes correspondent les situations suivantes ?
 La contrainte normale à toute facette est nulle.
 La contrainte de cisaillement sur toute facette est nulle.

2- Soit un état de contrainte de surface défini par : $\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 10 & -5 \\ -5 & 5 \end{bmatrix}$ en MPa

Déterminer les contraintes principales et directions associées.

Dans quelle position une fissure débouchant sur cette surface sera-t-elle la moins pénalisante ?

II-2.3 Tri-cercle de Mohr

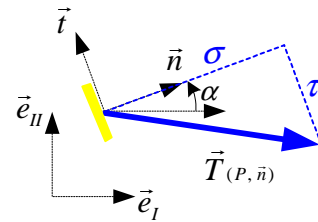
Idee : on cherche une représentation de l'état contrainte (σ, τ) quand \vec{n} varie.

Pour simplifier considérons dans un premier temps un état de contraintes planes, et plaçons-nous dans la base principale.

On note $\vec{n} = \begin{Bmatrix} \cos \alpha \\ \sin \alpha \end{Bmatrix}$ et $\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_I & \\ & \sigma_{II} \end{bmatrix} \rightarrow \vec{T} = \begin{Bmatrix} \sigma_I \cos \alpha \\ \sigma_{II} \sin \alpha \end{Bmatrix}$

D'où la contrainte normale $\sigma = \sigma_I \cos^2 \alpha + \sigma_{II} \sin^2 \alpha$

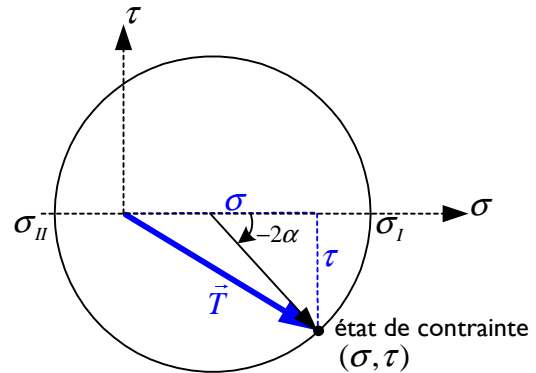
et la contrainte de cisaillement $\tau = (\sigma_{II} - \sigma_I) \cos \alpha \sin \alpha$



Soit :
$$\begin{cases} \sigma = \frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2} + \frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \cos 2\alpha \\ \tau = -\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2} \sin 2\alpha \end{cases}$$

le vecteur \vec{n} décrivant l'ensemble des directions du plan le point (σ, τ) décrit un cercle.

de centre $\frac{\sigma_I + \sigma_{II}}{2}$ de rayon $\frac{\sigma_I - \sigma_{II}}{2}$



Les contraintes principales sont ordonnées $\sigma_I > \sigma_{II}$

C'est le cercle de Mohr des contraintes planes

Pour un état de contrainte tridimensionnel

Ce qui vient d'être fait dans un plan principal de contrainte peut l'être dans les deux autres plans ce qui nous conduira au tri-cercle de Mohr.

Notons : $\begin{bmatrix} \bar{\sigma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sigma_1 & & \\ & \sigma_2 & \\ & & \sigma_3 \end{bmatrix}$ et $\vec{n} = \begin{Bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{Bmatrix} \rightarrow \vec{T} = \begin{Bmatrix} \sigma_1 n_1 \\ \sigma_2 n_2 \\ \sigma_3 n_3 \end{Bmatrix}$ sur la base principale.

et la décomposition $\vec{T} = \sigma \vec{n} + \vec{\tau}$ on pose $\|\vec{\tau}\| = \tau$

Nous avons : $\|\vec{n}\| = 1 \rightarrow n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$

$\vec{T} \cdot \vec{n} = \sigma \rightarrow \sigma_1 n_1^2 + \sigma_2 n_2^2 + \sigma_3 n_3^2 = \sigma$

Et $\|\vec{T}\|^2 = \sigma^2 + \tau^2 \rightarrow \sigma_1^2 n_1^2 + \sigma_2^2 n_2^2 + \sigma_3^2 n_3^2 = \sigma^2 + \tau^2$

Soit sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1^2 & \sigma_2^2 & \sigma_3^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} n_1^2 \\ n_2^2 \\ n_3^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ \sigma \\ \sigma^2 + \tau^2 \end{Bmatrix}$$

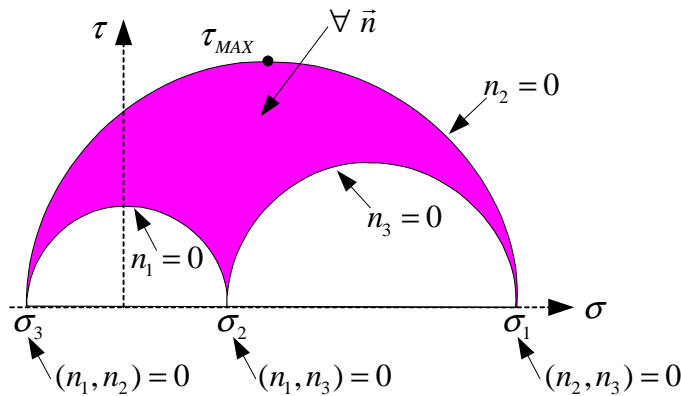
D'où l'on tire :

$$\begin{cases} n_1^2 = \frac{\left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 - \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2}{(\sigma_2 - \sigma_1)(\sigma_3 - \sigma_1)} \\ n_2^2 = \frac{\left(\sigma - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 - \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2}{(\sigma_3 - \sigma_2)(\sigma_1 - \sigma_2)} \\ n_3^2 = \frac{\left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 - \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2}{(\sigma_1 - \sigma_3)(\sigma_2 - \sigma_3)} \end{cases}$$

Pour une configuration $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$, il faut vérifier $n_i^2 \geq 0$ ce qui nous donne 3 conditions :

$$\begin{cases} \left(\sigma - \frac{\sigma_2 + \sigma_3}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_2 - \sigma_3}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_3 + \sigma_1}{2}\right)^2 + \tau^2 \leq \left(\frac{\sigma_3 - \sigma_1}{2}\right)^2 \\ \left(\sigma - \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}\right)^2 + \tau^2 \geq \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_2}{2}\right)^2 \end{cases}$$

Dans le plan (σ, τ) , la zone est donc délimitée par 3 cercles correspondants aux 3 cercles de Mohr des plans principaux $n_i = 0$, nous limitons la représentation du tri-cercle de Mohr au demi-plan car $\tau \geq 0$ ($\tau = \|\vec{\tau}\|$)



Les trois points sur l'axe horizontal correspondent aux 3 contraintes principales. La figure montre que le cisaillement maximal est égal au rayon du plus grand cercle, et s'exerce sur une facette située à 45° dans le plan défini par les directions principales correspondantes aux contraintes principales extrêmes.

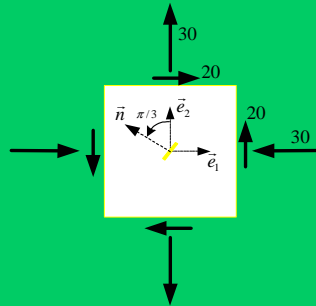
Pour notre figure $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3 \rightarrow \tau_{MAX} = (\sigma_1 - \sigma_3)/2$ Sur une facette de normale $\vec{n} = \frac{\sqrt{2}}{2}(\vec{n}_1 + \vec{n}_3)$

Sur cette facette la contrainte normale est $\sigma = (\sigma_1 + \sigma_3)/2$

Dans le cas général $\tau_{MAX} = (\max(\sigma_i) - \min(\sigma_i))/2$

Exercice II-3 : État de contrainte plane

On considère l'état homogène de contrainte plane défini par la figure ci dessous en (MPa)



- 1- Déterminer les contraintes principales et les directions associées
Par le calcul
En utilisant le cercle de Mohr
- 2- Calculer la contrainte normale et celle de cisaillement sur la facette de normale \vec{n} (cf. figure).
Par le calcul
En utilisant le cercle de Mohr

II-3 Critères de limite élastique

Les critères servent à définir le domaine des sollicitations pour lesquelles le comportement du matériau sera élastique c'est-à-dire instantané et réversible. Ces critères s'expriment en fonction des invariants du tenseur des contraintes c'est pourquoi nous en parlons dans ce chapitre.

Notion de critère

L'expérience montre que la notion de critère doit tenir compte de l'historique \mathcal{H} du matériau. Le critère de limite élastique est une fonction réelle $f(\sigma, H)$ telle que un état de contrainte sera dit admissible si $\sigma \in D_e$.

$$D_e = \left\{ \bar{\sigma} ; f(\bar{\sigma}, H) \leq 0 \right\}$$

La surface $f(\sigma, H) = 0$ est dite **surface Limite**

Un état de contrainte extérieur au domaine admissible est physiquement impossible à atteindre

Pour un matériau isotrope f doit être invariant dans tout changement de base, la représentation de surface limite dans l'espace des contraintes principales est une surface pour laquelle, les plans (1,1,0), (0,1,1), (1,0,1) sont des plans de symétrie, et l'axe (1,1,1) est un axe de symétrie ternaire.

II-3.1 Invariants scalaires du tenseur des contraintes

Les coefficients du polynôme caractéristique $P = \det(\bar{\sigma} - \lambda \bar{1})$ sont les invariants du tenseur des contraintes.

Le premier invariant est la contrainte moyenne définie par $\sigma_m = \frac{1}{3} \text{tr} \bar{\sigma}$

En contraintes principales : $\sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$

¹ L'historique ou paramètres de mémoire du matériau sont des notions relatives au cours sur les matériaux. Sachez que pour les métaux (**matériaux ductiles, ils peuvent se déformer plastiquement**) nous parlerons d'écrouissage. Par opposition un matériau est dit fragile s'il ne se déforme pas plastiquement (verre).

Le second et troisième invariants s'expriment en fonction du **déviateur des contraintes** : $\bar{s} = \bar{\sigma} - \sigma_m \bar{1}$. Le terme $\sigma_m \bar{1}$ est appelé partie sphérique du tenseur des contraintes, et \bar{s} la partie déviatorique du tenseur.

En contraintes principales : $s_i = \sigma_i - \sigma_m$

$J_2 = tr(\bar{s}^2)$ et $J_3 = tr(\bar{s}^3)$ sont les second et troisième invariants du tenseur.

En contraintes principales : $J_2 = s_1^2 + s_2^2 + s_3^2$
 $J_3 = s_1^3 + s_2^3 + s_3^3$

On peut noter que : $tr \bar{s} = 0 \rightarrow J_3 = 3 \det \bar{s}$

Un peu de physique :

L'expérience montre qu'un élément de matière homogène isotrope (métaux) conserve un comportement élastique quelque soit l'état de contrainte hydrostatique qui lui est appliqué. Or un état de contrainte hydrostatique, correspond à un déviateur des contraintes nul, c'est pourquoi les critères d'élasticité des métaux sont indépendants du premier invariant, ils ne dépendent que du déviateur des contraintes. Notez qu'un sable ou un sol ne peut pas être assimilé à un solide homogène isotrope (grains), c'est pourquoi pour ces matériaux les critères seront fonction du premier invariant "pression moyenne".

II-3.2 critères pour les métaux

Ces critères sont anciens, ils restent cependant largement utilisés car les méthodes d'identification fiables des paramètres du modèle caractérisant le comportement des matériaux ont fait leurs preuves pour ces critères.

Critère de Tresca (1870)

Ce critère, le plus ancien, est d'origine physique il consiste à observer que l'état limite est atteint pour une valeur de cisaillement maximale qui est une caractéristique du matériau.

La surface limite est définie par : $\tau_{Max} - \tau_o \leq 0$

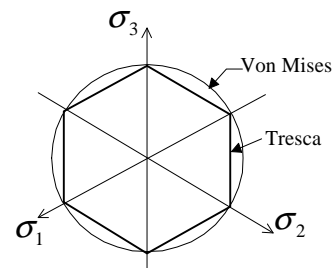
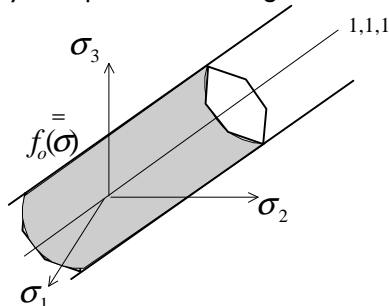
En contraintes principales : $\tau_{Max} = \frac{1}{2} \max_{ij} |\sigma_i - \sigma_j|$

Ce critère est bien indépendant de la partie sphérique du tenseur des contraintes. Le fait ajouter un état de contrainte hydrostatique ne modifie pas la valeur du seuil.

Pour un essai de traction, le seuil est défini par $\tau_o = \sigma_o / 2$.

Si l'on utilise cet essai comme référence, la contrainte de Tresca est : $\sigma_T = \max_{ij} |\sigma_i - \sigma_j|$

La surface limite est définie par $\sigma_T = \sigma_o$ sa représentation graphique dans l'espace des contraintes principales est une surface cylindrique de base hexagonale non bornée d'axe (1,1,1).



Critère de Von Mises (1910)

Ayant observé que le critère de Tresca était trop sévère, Von Mises proposa un critère plus mathématique basé sur le second invariant du tenseur des contraintes.

La surface limite est définie par : $\sqrt{J_2} - \sigma_s \leq 0$

σ_s a la dimension d'une contrainte et représente la valeur critique (seuil)

En pratique on souhaite identifier le seuil à la valeur de σ_o de l'essai de traction.

Exprimons J_2 en fonction des contraintes principales

$$J_2 = \sum_{i=1}^3 (\sigma_i - \sigma_m)^2 \quad \text{avec } \sigma_m = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3$$

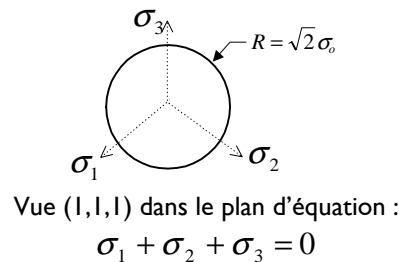
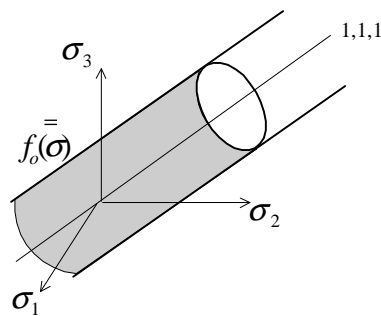
$$\rightarrow J_2 = \frac{1}{3} \left((\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right)$$

Pour l'essai de traction $\sigma_2 = \sigma_3 = 0 \quad \rightarrow J_2 = \frac{2}{3} \sigma_1^2$

La grandeur $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{3}{2} J_2}$ est appelée **contrainte équivalente de Von Mises**.

En contraintes principales : $\sigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{2} \left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 \right]}$

La surface limite est définie par $\sigma_{VM} = \sigma_o$ sa représentation graphique dans l'espace des contraintes principales est une surface cylindrique non bornée d'axe (1,1,1) de rayon $\sqrt{2} \sigma_o$



L'écart maximal entre le critère de Von Mises et celui de Tresca est $1 - \sqrt{3}/2$ soit un écart de l'ordre de 13%. De ce fait, le critère de Tresca plus restrictif est moins utilisé pour le dimensionnement des pièces mécaniques, et la plus part des codes de calcul (éléments finis) en mécanique proposent, par défaut, la visualisation de la contrainte équivalente de Von Mises.

II-3.3 critères pour les matériaux granulaires (sols)

Ces critères doivent traduire le fait que la résistance au cisaillement est d'autant plus forte que la compression (confinement) du milieu est élevée.

$\tau_{Max}(\sigma_m)$ est fonction du premier invariant, et τ_{Max} augmente avec $-\sigma_m$ il faut penser $\sigma_m < 0$

Critère de Mohr – Coulomb : $\tau \leq C - \sigma_m \tan \varphi$

C : Constante de cohésion, c'est la résistance au cisaillement en absence de compression

$C = 0$ le matériau est dit pulvérulent (sable)

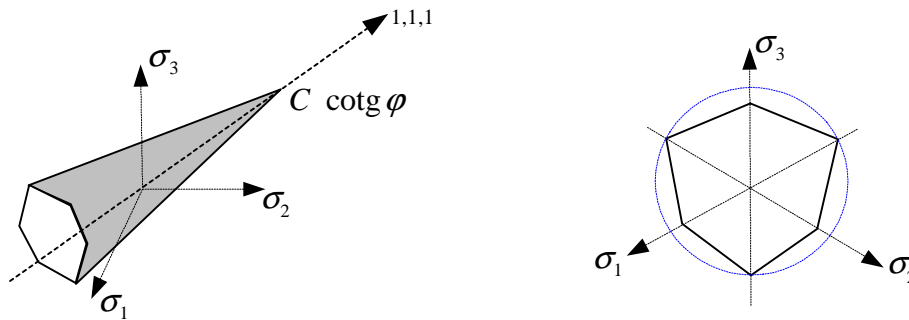
φ : Angle de frottement, il traduit l'augmentation de la résistance au cisaillement avec le confinement (frottement de contact inter-granulaire)

$\varphi = 0$ le matériau est parfaitement cohérent
on retrouve le critère de Tresca

La surface limite est définie par

$$(1 + \sin \varphi) \text{Max}(\sigma_i) - (1 - \sin \varphi) \text{Min}(\sigma_i) = 2C \cos \varphi$$

sa représentation graphique dans l'espace des contraintes principales est une surface conique non bornée d'axe (1,1,1).



Critère de Drücker – Prager : $\sqrt{J_2} \leq C_D - \sqrt{3}\sigma_m \tan \varphi_D$

La signification physique de ce critère est identique à celle du critère de Mohr – Coulomb avec comme support mathématique le critère de Von-Mises

Exercice II-4 : Essai de traction

On étudie ici l'essai classique de traction. L'éprouvette est cylindrique de diamètre $d=10$ mm et de hauteur $h=10$ cm. Elle est soumise à un effort $F=200$ N

- 1- Dans la zone centrale de l'éprouvette l'état de contrainte est supposé uniforme et uniaxial, donner son expression.
- 2- Exprimer, en fonction de F et S , la contrainte normale et celle de cisaillement sur une facette inclinée d'un angle α quelconque.
 Caractériser les états de contrainte pour $\alpha = 0^\circ$ et 90° .
 Quelle est la valeur du cisaillement maximal sur quels plans agit-il ?
 Retrouver ces résultats en utilisant le cercle de Mohr
- 3- Représenter le critère de Tresca dans le plan (σ, τ) .
 En déduire la valeur du cisaillement limite en fonction de la limite élastique du matériau σ_o .
- 4- Représenter le critère de Mohr-Coulomb " $\tau \leq \tau_C - \gamma \sigma$ " dans le plan (σ, τ) .
 Dans quel plan se produira la rupture de l'éprouvette ?
 Quelle est la charge limite de cette éprouvette ?
 Analyser les résultats.

II-4 Équations du mouvement

II-4.1 éléments de calcul indispensables

Nous rappelons ici sans en donner la démonstration les théorèmes mathématiques qui vont être utilisés dans ce chapitre.

Formules de Green – Ostrogradsky

La formule de Green – Ostrogradsky ou théorème de la divergence permet de passer d'une intégrale de volume à une intégrale de surface, c'est une formule d'intégration par parties.

Pour a scalaire	$\int_D \text{grad} a \, dV = \int_{\partial D} a \vec{n} \, dS$
Pour \vec{a} vecteur	$\int_D \text{div} \vec{a} \, dV = \int_{\partial D} \vec{a} \cdot \vec{n} \, dS$
Pour $\overset{=}{a}$ tenseur	$\int_D \text{div} \overset{=}{a} \, dV = \int_{\partial D} \overset{=}{a} \vec{n} \, dS$

Dérivation d'une intégrale : Théorème de Reynolds

$$\frac{d}{dt} \left(\int_D \bar{A} dV \right) = \int_D \left(\frac{d\bar{A}}{dt} + \bar{A} \operatorname{div} \bar{v} \right) dV$$

Formule valable avec a scalaire ou \bar{a} vecteur

Application : écrivons le TH de Reynolds dans le cas d'une grandeur scalaire.

$$\frac{d}{dt} \int_D g dV = \int_D (\dot{g} + g \operatorname{div} \bar{v}) dV$$

Nous obtenons :

$$\frac{d}{dt} \int_D g dV = \int_D \left(\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}(g\bar{v}) \right) dV$$

Utilisons La dérivée Eulérienne $\dot{g} = \frac{\partial g}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot \bar{v}$

Et $\overrightarrow{\operatorname{grad}} g \cdot \bar{v} + g \operatorname{div} \bar{v} = \operatorname{div}(g\bar{v})$

Appliquons le Th d'Ostrogradsky: $\frac{d}{dt} \int_D g dV = \int_D \frac{\partial g}{\partial t} dV + \int_{\partial D} g \bar{v} \cdot \bar{n} dS$

II-4.2 conservation de la masse

C'est une application directe des formules précédentes

La masse du système est définie par $M = \int_D \rho dV \rightarrow \frac{dM}{dt} = \int_D (\dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \bar{v}) dV$

Écrire $\frac{dM}{dt} = 0$ pour tout domaine $\rightarrow \dot{\rho} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0$

Avec la dérivée Eulérienne: $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \overrightarrow{\operatorname{grad}} \rho \cdot \bar{v} + \rho \operatorname{div} \bar{v} = 0$ soit $\frac{\partial g}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \bar{v}) = 0$

C'est l'équation d'Euler

En utilisant la transformation géométrique la conservation de la masse peut s'écrire :

$$dm = \rho_o dV_o = \rho dV \quad \text{or} \quad dV = J dV_o \rightarrow \frac{\rho}{\rho_o} = \frac{1}{J}$$

II-4.3 Équations du mouvement

PFD

Écrivons le Principe Fondamental de la Dynamique pour un domaine matériel quelconque nous avons :

Les 3 équations de résultantes sont: $\int_D \rho \bar{a} dV = \int_D \bar{f} dV + \int_{\partial D} \bar{T} dS$

Ces équations sont écrites dans l'état déformé

Or $\bar{T} = \bar{\sigma} \bar{n} \rightarrow \int_D \rho \bar{a} dV = \int_D \bar{f} dV + \int_{\partial D} \bar{\sigma} \bar{n} dS$

Le Th d'Ostrogradsky $\rightarrow \int_D \rho \bar{a} dV = \int_D \bar{f} dV + \int_D \operatorname{div}(\bar{\sigma}) dV$

Soit: $\int_D (\rho \bar{a} - \bar{f} - \operatorname{div}(\bar{\sigma})) dV = 0$ et ceci $\forall D$

Nous obtenons les 3 équations locales: $\rho \bar{a} = \bar{f} + \operatorname{div}(\bar{\sigma})$

Ces équations sont définies à l'intérieur du domaine, dans son état actuel.

Les 3 équations de moment donnent: $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ Symétrie du tenseur des contraintes

Sur la frontière du domaine nous devons écrire des conditions aux limites (échanges avec l'extérieur), ces conditions aux limites sont de deux types :

Déplacements imposés $\bar{u} = \bar{u}_d$ sur la frontière ∂D_u **condition dite de Dirichlet**

Forces imposées $\bar{\sigma} \bar{n} = \bar{T}_d$ sur la frontière ∂D_σ **condition dite de Neumann**

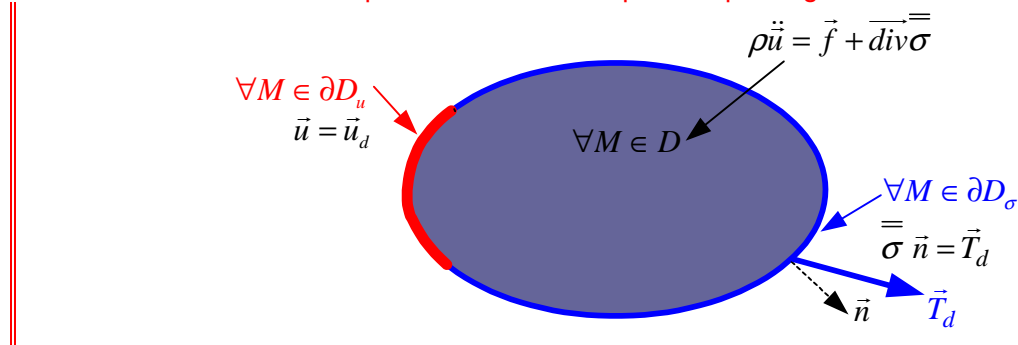
Bien entendu $\partial D = \partial D_u \cup \partial D_\sigma$ et $\partial D_u \cap \partial D_\sigma = \emptyset$

Il est impossible d'imposer à la fois le déplacement et les efforts

Du point de vue pratique l'ingénieur parlera de conditions aux limites cinématiques (déplacements ou vitesses) et naturelles (forces ou pressions). Cette classification sera essentielle pour lorsque nous aborderons la résolution de ces problèmes.

La mise en équations par le PFD conduit à un système d'**Équations aux Dérivées Partielles "EDP"**

Pour le PFD : Nous obtenons le problème aux limites représenté par la figure ci-dessous



PTV

Écrivons maintenant le Principe des Travaux Virtuels : $\forall \delta \bar{u} \quad \delta A = \delta T_e + \delta T_i$ à tout instant

$$\delta A = \int_D \rho \bar{a} \cdot \delta \bar{u} \, dV \quad \text{Représente le travail virtuel des quantités d'accélération}$$

$$\delta T_e = \int_D \bar{f} \cdot \delta \bar{u} \, dV + \int_{\partial D} \bar{T} \cdot \delta \bar{u} \, dS \quad \text{Représente le travail virtuel des efforts extérieurs}$$

$$\delta T_i = - \int_D \bar{\sigma} : \delta \bar{\epsilon} \, dV \quad \text{Représente le travail virtuel des efforts intérieurs, les contraintes}$$

σ_{ii} travaillent dans des déformations $\delta \epsilon_{ii}$, et les cisaillements σ_{ij} dans des "glissements" $\delta \epsilon_{ij}$.

Le produit doublement contracté des deux tenseurs signifie que l'on multiplie terme à terme les coefficients des matrices correspondantes. Compte tenu de la symétrie des tenseurs, l'énergie de déformation élémentaire est :

$$2E_d = \bar{\sigma} : \bar{\epsilon} = \sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + \sigma_{33} \epsilon_{33} + 2\sigma_{12} \epsilon_{12} + 2\sigma_{13} \epsilon_{13} + 2\sigma_{23} \epsilon_{23}$$

On peut utiliser les glissements $\gamma_{ij} = 2\epsilon_{ij}$ dans cette expression

Le tenseur taux de déformation est défini par $\delta \bar{\epsilon} = \frac{1}{2} \left(\overline{\text{grad}}^T (\delta \bar{u}) + \overline{\text{grad}} (\delta \bar{u}) \right)$

Pour le PTV : Nous obtenons la formulation variationnelle du problème

$$\forall \delta \bar{u} \quad \int_D \rho \bar{a} \cdot \delta \bar{u} \, dV = - \int_D \bar{\sigma} : \delta \bar{\epsilon} \, dV + \int_D \bar{f} \cdot \delta \bar{u} \, dV + \int_{\partial D} \bar{T} \cdot \delta \bar{u} \, dS$$

à tout instant, pour tout système

L'intérêt de cette formulation est qu'elle se prête bien aux calculs numériques. Nous présentons dans un autre cours "MEF : Méthode des Éléments Finis" comment passer de cette forme intégrale à une équation matricielle calculée à partir d'une discrétisation du domaine en éléments de formes géométriques simples

Les deux principes de la mécanique énoncés précédemment sont bien entendu équivalents

Partons de l'équation locale $\rho \vec{a} - \vec{f} - \overline{\text{div}}(\overline{\sigma}) = \vec{0}$ sur le domaine

$$\text{"EL"} \Leftrightarrow \forall \delta \vec{u} \int_D \delta \vec{u} \cdot (\rho \ddot{\vec{u}} - \overline{\text{div}}(\overline{\sigma}) - \vec{f}) dV = 0$$

$$\text{Or } \overline{\text{div}}(\overline{\sigma} \delta \vec{u}) = \overline{\sigma} : \overline{\text{grad}}(\delta \vec{u}) + \overline{\text{div}}\overline{\sigma} \cdot \delta \vec{u}$$

$$\text{En cartésiennes } (p_i \sigma_{ij})_{,j} = \sigma_{ij} p_{i,j} - \sigma_{ij,j} p_i$$

De plus $\overline{\sigma}$ est un tenseur symétrique donc

$$\overline{\text{div}}(\overline{\sigma} \delta \vec{u}) = \overline{\sigma} : \overline{\text{grad}}^T(\delta \vec{u}) + \overline{\text{div}}\overline{\sigma} \cdot \delta \vec{u}$$

$$\text{Nous avons donc } \overline{\text{div}}\overline{\sigma} \cdot \delta \vec{u} = \overline{\text{div}}(\overline{\sigma} \delta \vec{u}) + \overline{\sigma} : \left(\frac{\overline{\text{grad}}^T \delta \vec{u} + \overline{\text{grad}} \delta \vec{u}}{2} \right)$$

En reportant dans la première relation nous obtenons :

$$\text{"EL"} \Leftrightarrow \forall \delta \vec{u} \int_D (\delta \vec{u} \cdot \rho \ddot{\vec{u}} + \overline{\sigma} : \overline{\text{grad}}_s(\delta \vec{u}) - \overline{\text{div}}(\overline{\sigma} \delta \vec{u}) - \delta \vec{u} \cdot \vec{f}) dV = 0$$

Appliquons le TH d'Ostrogradsky

$$\int_D \overline{\text{div}}(\overline{\sigma} \delta \vec{u}) dV = \int_{\partial D} \overline{\sigma} \delta \vec{u} \cdot \vec{n} dS = \int_{\partial D} \delta \vec{u} \cdot \overline{\sigma} \vec{n} dS$$

Utilise la symétrie du tenseur des contraintes

$$\text{"EL"} \Leftrightarrow \forall \delta \vec{u} \int_D (\delta \vec{u} \cdot \rho \ddot{\vec{u}} + \overline{\sigma} : \overline{\text{grad}}_s(\delta \vec{u}) - \delta \vec{u} \cdot \vec{f}) dV - \int_{\partial D} (\delta \vec{u} \cdot \overline{\sigma} \vec{n}) dS = 0$$

En tenant compte des conditions aux limites sur la frontière $\partial D_\sigma \quad \forall M \in \partial D_\sigma \quad \overline{\sigma} \vec{n} = \vec{T}_d$

{ "EL."
C.Limites sur Γ_σ

$$\Leftrightarrow \forall \delta \vec{u} \int_D (\delta \vec{u} \cdot \rho \ddot{\vec{u}} + \overline{\sigma} : \overline{\text{grad}}_s(\delta \vec{u}) - \delta \vec{u} \cdot \vec{f}) dV - \int_{\partial D_u} \delta \vec{u} \cdot \overline{\sigma} \vec{n} dS - \int_{\partial D_\sigma} \delta \vec{u} \cdot \vec{T}_d dS = 0$$

Soit le PTV :

$$\forall \delta \vec{u} \int_D \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} dV + \int_D \overline{\sigma} : \delta \overline{\varepsilon} dV = \int_D \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV + \int_{\partial D} \vec{T} \cdot \delta \vec{u} dS$$

$\overline{\sigma} \vec{n} = \vec{T}_d$ Champ des efforts inconnus sur cette frontière

Si nous utilisons un champ de déplacement virtuel à valeur nulle sur la frontière ∂D_u

$$\forall M \in \partial D_u \quad \delta \vec{u}_{(M)} = \vec{0} \quad \rightarrow \quad \int_{\partial D_u} \delta \vec{u} \cdot \overline{\sigma} \vec{n} dS = 0$$

Champ de déplacement virtuel cinématiquement admissible

Nous obtenons la **formulation variationnelle du problème**

$$\forall M \in \partial D_u \quad \vec{u} = \vec{u}_d \quad \text{soit } \delta \vec{u}_{CA}$$

$$\forall \delta \vec{u}_{CA} \int_D \rho \ddot{\vec{u}} \cdot \delta \vec{u} dV + \int_D \overline{\sigma} : \delta \overline{\varepsilon} dV = \int_D \vec{f} \cdot \delta \vec{u} dV + \int_{\partial D_\sigma} \vec{T}_d \cdot \delta \vec{u} dS$$

Notes personnelles